

一类时滞分数阶 Volterra 微积分方程组 的严格误差分析*

郑伟珊

韩山师范学院数学与统计学院, 广东 潮州 521041

摘要: 采用谱配置方法分析带一般时滞项的分数阶 Volterra 微积分方程. 通过严格的误差分析证明了近似解的误差和近似分数阶导数的误差在 L^∞ 和 $L_{\omega^m}^2$ 模意义下呈指数衰减. 最后用数值例子来验证理论分析的正确性.

关键词: 分数阶 Volterra 微积分方程; Jacobi 配置法; 时滞; 误差估计

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2023)06-0152-07

Sharp error estimate for fractional Volterra integro-differential equations with delay

ZHENG Weishan

College of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China

Abstract: Spectral methods are developed for solving fractional differential equations with vanishing delay numerically. Sharp error estimates are carried out, which indicates that the error of solution and the error of exact fractional derivative decay exponentially in both L^∞ and $L_{\omega^m}^2$. In the end, a numerical example is presented to confirm our theoretical findings.

Key words: fractional Volterra integro-differential equation; Jacobi collocation method; delay; sharp error estimate

我们研究的分数阶时滞 Volterra 微积分方程组形式如下:

$$D^{(\gamma)}F(\tau) = F(\tau) + \int_0^{\psi(\tau)} \tilde{K}(\tau, \xi)F(\xi)d\xi + G(\tau), \quad (1)$$

$$F(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\tau (\tau - \xi)^{\gamma-1} D^\gamma F(\xi) d\xi + F(0), \quad (2)$$

这里 $\tau \in [0, T]$, $0 < \gamma < 1$, D^γ 和 Γ 分别表示 Caputo 分数阶求导算子和 Gamma 函数, 并已知核函数 \tilde{K} 和源函数 G 是给定的函数. 假定这些函数都在对应的定义域上充分光滑. 延迟项是 $\psi(\tau)$ 并满足:

$$\psi(0) = 0, \quad 0 < \psi(\tau) \leq \tau, \quad \psi'(\tau) > 0, \quad \psi(\tau) \in C^m([0, \tau]), \quad m \geq 1.$$

Volterra 型方程常用于描述捕食系统中掠食者与猎物进行互动时的动力学行为, 一直备受广泛关注. 关于谱配置方法研究 Volterra 积分方程, 汤涛院士首次采用 Legendre 谱配置方法研究 Volterra 积分方程 (Tang et al., 2008), 随后与陈艳萍教授合作探讨解充分光滑条件下的弱奇异 Volterra 积分方程 (Chen et al.,

* 收稿日期: 2022-09-06

录用日期: 2022-12-16

网络首发日期: 2023-09-26

基金项目: 广东省教育厅项目(2020KTSCX078, 2021KTSCX071, 2022KTSCX077, HSGDJG21356-372);

韩山师范学院项目(521036, QD202212)

作者简介: 郑伟珊(1983年生), 女; 研究方向: 数值计算; E-mail: weishanzheng@hstc.edu.cn

2009)和解非充分光滑的弱奇异 Volterra 积分方程(Chen et al., 2010), 提出并分析了一种高精度的 Jacobi 谱配置方法, 并引起了大量相关后续研究(Wei et al., 2012; Zhang et al., 2013; Tohidi et al., 2014; Yang et al., 2014; Gu, 2016; Cai et al., 2018; Gu, 2020; Zheng, 2021), 这些研究皆基于谱分析具有显著的误差指数收敛性. 近年分数阶方程发展迅速, 由于其具有广泛的应用背景, 诸如反应扩散问题、吸烟模型、疾病传播等(Zeng et al., 2014; Khan et al., 2019; Shah et al., 2020), Volterra 型方程的研究也逐步迈向分数阶领域(Yang et al., 2014; Cai et al., 2018), 然而发展缓慢, 特别是考虑时滞因素的成果几乎没有, 事实上时滞因素普遍存在, 故本文将对一般时滞分数阶 Volterra 微积分方程组进行严格的误差分析, 为此需要进行如下变量变换, 令

$$\tau = \frac{T(1+t)}{2}, \quad \xi = \frac{T(1+s)}{2}.$$

方程组(1)~(2)化为:

$$D^\gamma f(t) = f(t) + \int_{-1}^{\phi(t)} K(t,s)f(s)ds + g(t), \quad (3)$$

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \int_{-1}^t (t-s)^{\gamma-1} D^\gamma f(s)ds + f(-1), \quad (4)$$

其中

$$f(t) = F\left(\frac{T(1+t)}{2}\right), \quad K(t,s) = \frac{T}{2} \tilde{K}\left(\frac{T(1+t)}{2}, \frac{T(1+s)}{2}\right),$$

$$g(t) = G\left(\frac{T(1+t)}{2}\right), \quad \phi(t) = \frac{2}{T} \psi\left(\frac{T(1+t)}{2}\right) - 1.$$

现在令 $-r = \gamma - 1$ 且以一组 Jacobi-Gauss 点 $\{t_j\}_{j=0}^N \in [-1, 1]$ 为配置点, 其权为 $\omega^{-r, -r}$. 显然方程组(3)~(4)在配置点上恒成立. 但当 t_j 非常小时, 几乎没有多少信息可以使用, 为了获得超收敛结论, 借助如下变量替换:

$$s = s(t_j, \nu) = \frac{1 + \phi(t_j)}{2} \nu + \frac{\phi(t_j) - 1}{2}, \quad -1 \leq \nu \leq 1.$$

则方程(3)可记为:

$$D^\gamma f(t_j) = f(t_j) + \frac{1 + \phi(t_j)}{2} \int_{-1}^1 K(t_j, s(t_j, \nu)) f(s(t_j, \nu)) d\nu + g(t_j). \quad (5)$$

类似地处理方程(4), 令 $s = s(t_j, \nu) = \frac{1 + t_j}{2} \nu + \frac{t_j - 1}{2}$, 得到

$$f(t_j) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T(1+t_j)}{4}\right)^\gamma \int_{-1}^1 (1-\nu)^{-r} D^\gamma f(s(t_j, \nu)) d\nu + f(-1). \quad (6)$$

记 $f_j^\rho \approx D^\rho f(t_j)$, 其中 $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq j \leq N$, 再记 $U^\rho(t) = \sum_{i=0}^N f_i^\rho L_i(t)$, 这里 $L_i(t)$ 是以 $\{t_i\}_{i=0}^N$ 为插值基点的第 i 次拉格朗日插值基函数, 故当 $\rho = 0$ 时, $U(t) \approx f(t)$, 当 $0 < \rho < 1$ 时, $U^\rho(t) \approx D^\rho f(t)$. 显然 $U^\rho(t) \in \mathcal{P}_N$, 这里 \mathcal{P}_N 表示所有次数不超过 N 的多项式构成的空间. 使用 Jacobi-Gauss 积分法则同时用 $U^\rho(t)$ 代替 $D^\rho f(t)$, 得到如下谱方案:

$$f_j^\gamma = f_j + \frac{1 + \phi(t_j)}{2} \sum_{i=0}^N f_i \left(\sum_{l=0}^N K(t_j, s(t_j, \nu_l)) L_i(s(t_j, \nu_l)) \omega_l \right) + g(t_j), \quad (7)$$

$$f_j = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T(1+t_j)}{4}\right)^\gamma \sum_{i=0}^N f_i^\gamma \left(\sum_{l=0}^N L_i(s(t_j, \tilde{\nu}_l)) \tilde{\omega}_l \right) + f(-1), \quad (8)$$

这里集合 $\{\nu_l\}_{l=0}^N$ 是由 Legendre-Gauss 配置点构成的, 其权为 $\omega_l (= \omega^{0,0})$, 而集合 $\{\tilde{\nu}_l\}_{l=0}^N$ 是 Jacobi-Gauss 配置点构成的, 相应的权为 $\tilde{\omega}_l (= \omega^{-r,0})$.

下面介绍下文的组织结构, 第1节中给出一些有用的引理, 这些引理对第2节的收敛性分析起着关键

的作用, 最后一节以一个数值例子验证理论分析的正确性. 需要指出的是通篇文章中 C 表示一个独立于 N 的正的常数, 但它依赖于给定的函数.

1 重要引理

引理 1(Canuto et al., 2006) 记 \mathcal{P}_N 表示所有次数不超过 N 的多项式所构成的空间, 我们用关于 Jacobi 权的 Gauss 积分法则求积分 $v\phi$, 这里 $v \in H_{\omega^{\alpha,\beta}}^m(-1, 1)$, 其中 $m \geq 1$ 且 $\phi \in \mathcal{P}_N$, 则

$$\left| \int_{-1}^1 u(t)\phi(t)dt - \sum_{l=0}^N u(t_l)\phi(t_l)\varpi_l \right| \leq CN^{-m} |u|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m+1}(-1,1)} \|\phi\|_{L^2(-1,1)}. \tag{9}$$

引理 2(Mastroianni et al., 2001) 定义 $\|J_N\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} \sum_{i=0}^N |L_i(t)|$, 则有如下结论成立:

$$\|J_N\|_\infty = \begin{cases} \mathcal{O}\left(N^{\frac{1}{2}-r}\right), & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \mathcal{O}(\log N), & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{10}$$

引理 3(Nevai, 1984) 若 $u(t)$ 为一有界函数, 则

$$\sup_N \left\| \sum_{i=0}^N u(t_i)L_i(t) \right\|_{L_{\omega^{\alpha,\beta}}^2(-1,1)} \leq C \max_{t \in [-1, 1]} |u(t)|. \tag{11}$$

引理 4(Canuto et al., 2006; Wei et al., 2012) 假设 $u \in H_{\omega^{\alpha,\beta}}^m(-1, 1)$, $J_N u(t) = \sum_{j=0}^N u(t_j)L_j(t)$ 定义如下:

$$I_N^{-\mu-\nu} v(x) = \sum_{i=0}^N v(x_i)F_i(x). \tag{12}$$

则成立如下估计式:

$$\|u - J_N u\|_{L^r(-1,1)} \leq CN^{-m} \begin{cases} N^{1-r} |u|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m+\frac{1}{2}}(-1,1)}, & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ N^{\frac{1}{2}} \log N |u|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m+\frac{1}{2}}(-1,1)}, & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$\|u - J_N u\|_{L_{\omega^{\alpha,\beta}}^2(-1,1)} \leq CN^{-m} |u|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m+1}(-1,1)}.$$

引理 5(Ragozin, 1970; 1971) 对于一个非负整数 μ 和 $\delta \in (0, 1)$, 存在一个常数 $C_\delta^\mu > 0$, 使得对于任一函数 $u \in C^{\mu,\delta}[-1, 1]$, 有一个多项式函数 $\mathcal{T}_N u \in \mathcal{P}_N$ 满足

$$\|u - \mathcal{T}_N u\|_{L^r(-1,1)} \leq C_\delta^\mu N^{-(\mu+\delta)} \|u\|^{\mu,\delta}, \tag{13}$$

这里 $\|\cdot\|^{\mu,\delta}$ 是空间 $C^{\mu,\delta}([-1, 1])$ 中的标准模. 事实上, 正如参考文献(Ragozin, 1970; 1971) 所说的, \mathcal{T}_N 是一个从空间 $C^{\mu,\delta}([-1, 1])$ 到空间 \mathcal{P}_N 的线性映射.

引理 6(Colton et al., 1998) 对任一函数 $w \in C[-1, 1]$, \mathcal{M} 定义如下:

$$(\mathcal{M}w)(t) = \int_{-1}^t (t-\tau)^{-r} K(t, \tau)w(\tau)d\tau. \tag{14}$$

则对于不同的点 $t_1, t_2 \in [-1, 1]$ 和 $\delta \in (0, 1-r)$, 有

$$\frac{|\mathcal{M}w(t_1) - \mathcal{M}w(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\delta} \leq C \max_{t \in [-1, 1]} |w(t)|. \tag{15}$$

这意味着 $\|\mathcal{M}w\|^{0,\delta} \leq C \max_{t \in [-1, 1]} |w(t)|$.

2 误差估计

定理 1 设 $f(t) \in H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m+1}(I)$ 是方程组(3)~(4)的解, 这里 $I = (-1, 1)$, $m \geq 1$. $U^\rho(t)$ 当 $\rho = 0$ 是代表近似

解, 当 $\rho \in (0, 1)$ 时为近似分数阶导数. 定义 $e^\rho(t) = D^\rho f(t) - U^\rho(t)$ 为误差函数, 其中 $e^0(t) = e(t)$. 若 N 充分大, 则有如下结论

$$\|e^\rho\|_{L^r(I)} \leq CN^{-m} \begin{cases} N^{\frac{1}{2}-r} |K|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma}(I)} \|f\|_{L^2(I)} + N^{1-r} \left(|D^\gamma f|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma, \frac{1}{2}}(I)} + |f|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma, \frac{1}{2}}(I)} \right), & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \log N |K|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma}(I)} \|f\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}} \log N \left(|D^\gamma f|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma, \frac{1}{2}}(I)} + |f|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma, \frac{1}{2}}(I)} \right), & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

$$\|e^\rho\|_{L_{\sigma, \phi}^2(I)} \leq CN^{-m} \left(\|f\|_{L^2(I)} + \|e\|_{L^r(I)} + |D^\gamma f|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma, \frac{1}{2}}(I)} + |f|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma, \frac{1}{2}}(I)} \right) + N^{-\delta} \|e^\gamma\|_{L^r(I)}.$$

证明 把方程组(7)~(8)重记为

$$f_j^\gamma = f_j + \int_{-1}^{\phi(t_j)} K(t_j, s) U(s) ds + g(t_j) + J(t_j), \tag{16}$$

$$f_j = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \int_{-1}^{t_j} (t_j - s)^{-\gamma} U^\gamma(s) ds + f(-1), \tag{17}$$

其中

$$J(t) = \frac{1 + \phi(t)}{2} \sum_{l=0}^N K(t, s(t, \nu_l)) U(s(t, \nu_l)) \omega_l - \frac{1 + \phi(t)}{2} \int_{-1}^1 K(t, s(t, \nu)) U(s(t, \nu)) d\nu. \tag{18}$$

借助引理 1 获得 $J(t)$ 的估计

$$|J(t)| \leq CN^{-m} |K(t, s(t, \nu))|_{H_{\sigma, \phi}^{m, \gamma}(I)} \left(\|f\|_{L^r(-1, 1)} + \|U - f\|_{L^r(-1, 1)} \right). \tag{19}$$

在方程(3)上任取一配置点, 然后减去方程(16)可得

$$D^\gamma f(t_j) - f_j^\gamma = f(t_j) - f_j + \int_{-1}^{\phi(t_j)} K(t_j, s) (f(s) - U(s)) ds - J(t_j). \tag{20}$$

类似地, 对方程(4)和方程(17)得

$$f(t_j) - f_j = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \int_{-1}^{t_j} (t_j - s)^{-\gamma} (D^\gamma f(s) - U^\gamma(s)) ds. \tag{21}$$

在式(20)~(21)两端同时乘以 $L_j(t)$, 然后关于 j 从 0 到 N 进行累计求和, 获得如下误差方程组

$$e^\gamma(t) = e(t) + \int_{-1}^{\phi(t)} K(t, s) (f(s) - U(s)) ds - I_0(t) - I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \tag{22}$$

$$e(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \int_{-1}^t (t - s)^{-\gamma} e^\gamma(s) ds - I_2(t) + I_4(t), \tag{23}$$

其中

$$I_0(t) = J_N J(t), \quad I_1(t) = J_N D^\gamma f(t) - D^\gamma f(t), \quad I_2(t) = J_N f(t) - f(t),$$

$$J_3(t) = J_N \int_{-1}^{\phi(t)} K(t, s) e(s) ds - \int_{-1}^{\phi(t)} K(t, s) e(s) ds,$$

$$I_4(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \left(J_N \int_{-1}^t (t - s)^{-\gamma} e^\gamma(s) ds - \int_{-1}^t (t - s)^{-\gamma} e^\gamma(s) ds \right).$$

借助 Dirichlet's 法则: $\int_{-1}^t \int_{-1}^s \Phi(s, \nu) d\nu ds = \int_{-1}^t \int_\nu^t \Phi(s, \nu) ds d\nu$, 得

$$|e^\gamma(t)| \leq C \int_{-1}^t |e^\gamma(\phi(\nu))| d\nu + |e(t)| + \phi'(t) \int_{-1}^t |K(t, \phi(\tau))| (|I_2(\phi(\tau))| + |I_4(\phi(\tau))|) d\tau + \sum_{j=0}^3 |I_j(t)|.$$

由 Gronwall 不等式和式(23)有

$$\|e^\rho(t)\|_{L^r(I)} \leq C \sum_{j=0}^4 \|I_j(t)\|_{L^r(I)}, \quad \|e^\rho(t)\|_{L_{\sigma, \phi}^2(I)} \leq C \sum_{j=0}^4 \|I_j(t)\|_{L_{\sigma, \phi}^2(I)}. \tag{24}$$

下面逐项估计 $I_j(t)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$. 利用式(19)和引理 2 可得

$$\|I_0\|_{L^r(I)} \leq CN^{-m} \begin{cases} N^{\frac{1}{2}-r} |K(t, s(t, \nu))|_{H_{\sigma,0}^{m_i, N}(I)} (\|f\|_{L^2(I)} + \|e\|_{L^r(I)}), & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \log N |K(t, s(t, \nu))|_{H_{\sigma,0}^{m_i, N}(I)} (\|f\|_{L^2(I)} + \|e\|_{L^r(I)}), & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \quad (25)$$

再由引理 3 得

$$\|I_0\|_{L_{\sigma, -r}^2(I)} \leq CN^{-m} (\|f\|_{L^2(I)} + \|e\|_{L^r(I)}). \quad (26)$$

下面使用引理 4 直接估计 $I_j, j = 1, 2$, 有

$$\|I_j\|_{L^r(I)} \leq CN^{-m} \begin{cases} N^{1-r} \left(|D^\gamma f|_{H_{\sigma, \frac{1}{2}}^{m_i, N}(I)} + |f|_{H_{\sigma, \frac{1}{2}}^{m_i, N}(I)} \right), & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ N^{\frac{1}{2}} \log N \left(|D^\gamma f|_{H_{\sigma, \frac{1}{2}}^{m_i, N}(I)} + |f|_{H_{\sigma, \frac{1}{2}}^{m_i, N}(I)} \right), & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad (27)$$

$$\|I_j\|_{L_{\sigma, -r}^2(I)} \leq CN^{-m} \left(|D^\gamma f|_{H_{\sigma, -r}^{m_i, N}(I)} + |f|_{H_{\sigma, -r}^{m_i, N}(I)} \right). \quad (28)$$

再次使用引理 4, 不过此时令 $m = 1$, 得到

$$\|I_3\|_{L^r(I)} \leq \begin{cases} CN^{-r} \|e\|_{L^r(I)}, & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ CN^{-\frac{1}{2}} \log N \|e\|_{L^r(I)}, & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad (29)$$

$$\|I_3\|_{L_{\sigma, -r}^2(I)} \leq CN^{-1} \|e\|_{L_{\sigma, -r}^2(I)}. \quad (30)$$

对于 $I_4(t)$, 由引理 5 和引理 6 可知

$$\|I_4\|_{L^r(I)} = \|(J_N - E)(Me^\gamma - \mathcal{T}_N Me^\gamma)\|_{L^r(I)} \leq \begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-r-\delta} \|e^\gamma\|_{L^r(I)}, & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ CN^{-\delta} \log N \|e^\gamma\|_{L^r(I)}, & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad (31)$$

$$\|I_4\|_{L_{\sigma, -r}^2(I)} \leq C \|Me^\gamma - \mathcal{T}_N Me^\gamma\|_{L^r(I)} \leq CN^{-\delta} \|Me^\gamma\|^{0, \delta} \leq CN^{-\delta} \|e^\gamma\|_{L^r(I)}, \quad (32)$$

这里 E 是一单位变换且在如下假设下使用引理 6, 即当 $0 < r < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{2} - r < \delta < 1 - r$, 而当 $\frac{1}{2} \leq r < 1$ 时, $0 < \delta < 1 - r$. 故对于充分大的 N , 有 $\|I_4\|_{L^r(-1, 1)} \leq C \|e^\gamma\|_{L^r(-1, 1)}$. 联立式 (25)、(27)、(29) 和式 (31) 可以获得定理的第一个结论. 最后通过联立 $\|I_j(t)\|_{L_{\sigma, -r}^2(I)}, j = 0, 1, \dots, 4$ 和定理第 1 个结论, 可获得定理的第 2 个结果.

3 数值实验

定义 $U = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T, U^\gamma = (f_0^\gamma, f_1^\gamma, \dots, f_N^\gamma)^T, \tilde{G} = (g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_N))^T$, 则方程组 (7)~(8) 可记为如下矩阵形式:

$$U^\gamma = (E_1 + A)U + \tilde{G}, \quad (33)$$

$$U = U_{-1} + BU^\gamma, \quad (34)$$

其中

$$A_{ji} = \frac{1 + \phi(t_j)}{2} \sum_{l=0}^N K(t_j, s(t_j, \nu_l)) L_i(s(t_j, \nu_l)) \omega_l, \quad B_{ji} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{T(1+t_j)}{4} \right)^\gamma \sum_{l=0}^N L_i(s(t_j, \tilde{\nu}_l)) \tilde{\omega}_l,$$

$$U_{-1} = f(-1) \times (1, 1, \dots, 1)^T,$$

$$E_1 = \text{eye}(N+1, N+1).$$

例 1 把 $\gamma = 0.75$, $f(t) = \frac{(1+t)^3}{8}$, $K(t, s) = \frac{1}{2}$, $\phi(t) = \frac{(1+t)^2}{2} - 1$ 代入式(3)可得

$$D^{0.75} f(t) = \frac{(1+t)^3}{8} + \int_{-1}^{\frac{(1+t)^2}{2}-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1+t}{2} \right)^3 dt + \left(\frac{6(1+t)^{2.25}}{2^{2.25} \Gamma(3.25)} - \frac{(1+t)^3}{8} - \frac{(1+t)^8}{1024} \right). \quad (35)$$

显然初值条件为

$$f(-1) = 0.$$

采用 Matlab 软件进行数值计算，并把算得的解在不同的配置点数量下的 L^∞ 误差和 $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差记录在表 1 中，表 2 则记录分数阶导数在不同的配置点数量下的最大模误差和加权平方误差，从两个表的误差数据中可以发现误差呈指数衰减。

表 1 $f - U$ 的 L^∞ 误差和 $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差
Table 1 The errors of $f - U$ in L^∞ and $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ norms

N	2	4	6	8	10
L^∞ 误差	6.69×10^{-2}	2.23×10^{-4}	2.88×10^{-5}	6.49×10^{-6}	1.99×10^{-6}
$L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差	6.22×10^{-3}	7.67×10^{-5}	7.10×10^{-6}	1.26×10^{-6}	3.20×10^{-7}
N	12	14	16	18	20
L^∞ 误差	7.44×10^{-7}	3.21×10^{-7}	1.54×10^{-7}	8.00×10^{-8}	4.44×10^{-8}
$L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差	1.03×10^{-7}	3.90×10^{-8}	1.68×10^{-8}	7.92×10^{-9}	4.04×10^{-9}

表 2 $D^\gamma f - U^\gamma$ 的 L^∞ 误差和 $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差
Table 2 The errors of $D^\gamma f - U^\gamma$ in L^∞ and $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ norms

N	2	4	6	8	10
L^∞ 误差	4.71×10^{-2}	2.25×10^{-3}	4.36×10^{-4}	1.35×10^{-4}	5.38×10^{-5}
$L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差	8.98×10^{-3}	8.48×10^{-5}	8.04×10^{-6}	1.44×10^{-6}	3.65×10^{-7}
N	12	14	16	18	20
L^∞ 误差	2.52×10^{-5}	1.32×10^{-5}	7.53×10^{-6}	4.57×10^{-6}	2.91×10^{-6}
$L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差	1.17×10^{-7}	4.47×10^{-8}	1.93×10^{-8}	9.22×10^{-9}	4.73×10^{-9}

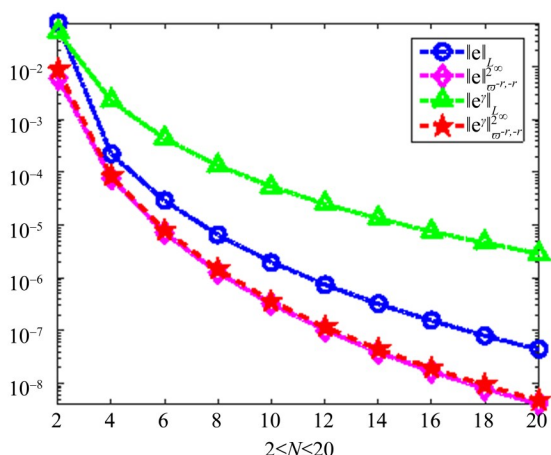


图 1 $D^\gamma f - U^\gamma$ 在不同配置点下的 L^∞ 误差和 $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ 误差比
Fig. 1 the errors of $D^\gamma f - U^\gamma$ versus different collocation points in L^∞ and $L^2_{\sigma^{\gamma, \tau}}$ norms

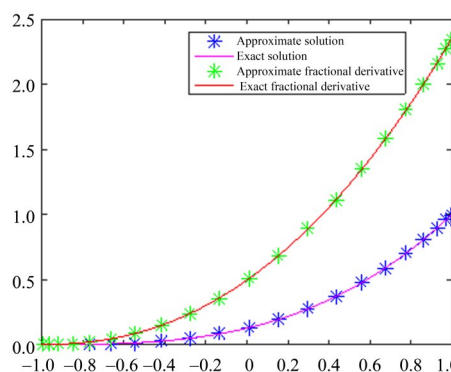


图 2 精确解/精确分数阶导数与近似解/近似分数阶导数的对比
Fig. 2 Comparison between exact solution/exact fractional derivative and approximate solution/approximate fractional derivative

为了可视化展示误差的指数衰减性,借助图形进行描述.图 1 是数值误差 $D^\alpha f - U^\alpha$ 的 L^∞ 误差和 L^2_{opt} 误差,这里 $2 \leq N \leq 20$,从图形上可以一目了然发现误差呈指数衰减.同时将精确解与近似解、精确分数阶导数与近似分数阶导数进行绘图(见图 2),从中发现它们分别高度一致,这更进一步验证了本文的结论.

References:

- CAI H, CHEN Y, 2018. A fractional order collocation method for second kind Volterra integral equations with weakly singular kernels[J]. *J Sci Comput*, 75(2): 970–992.
- CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, et al, 2006. Spectral methods: Fundamentals in single domains[M]. Berlin: Springer.
- CHEN Y, TANG T, 2009. Spectral methods for weakly singular Volterra integral equations with smooth solutions[J]. *J Comput Appl Math*, 233(4): 938–950.
- CHEN Y, TANG T, 2010. Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation methods for Volterra integral equations with a weakly singular kernel [J]. *Math Comput*, 79: 147–167.
- COLTON D, KRESS R, 1998. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. Berlin: Springer.
- GU Z, 2016. Multi-step Chebyshev spectral collocation method for Volterra integro-differential equations [J]. *Calcolo*, 53 (4) : 559–583.
- GU Z, 2020. Chebyshev spectral collocation method for system of nonlinear Volterra integral equations[J]. *Numer Algorithms*, 83 (1): 243–263.
- KHAN S A, SHAH K, ZAMAN G, et al, 2019. Existence theory and numerical solutions to smoking model under Caputo-Fabrizio fractional derivative[J]. *Chaos*, 29(1): 013128.
- MASTROIANNI G, OCCORSIO D, 2001. Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals: A survey [J]. *J Comput Appl Math*, 134(1/2): 325–341.
- NEVAI P, 1984. Mean convergence of Lagrange interpolation. III[J]. *Trans Amer Math Soc*, 282(2): 669–698.
- RAGOZIN D L, 1970. Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces[J]. *Trans Amer Math Soc*, 150 (1): 41–53.
- RAGOZIN D L, 1971. Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces[J]. *Trans Amer Math Soc*, 162: 157–170.
- SHAH K, JARAD F, ABDELJAWAD T, 2020. On a nonlinear fractional order model of dengue fever disease under Caputo-Fabrizio derivative[J]. *Alex Eng J*, 59(4): 2305–2313.
- TANG T, XU X, CHENG J, 2008. On spectral methods for Volterra integral equations and the convergence analysis[J]. *J Comput Math*, 26(6): 825–837.
- TOHIDI E, NAVID SAMADI O R, SHATEYI S, 2014. Convergence analysis of Legendre pseudospectral scheme for solving nonlinear systems of Volterra integral equations[J]. *Adv Math Phys*, 2014: 1–12.
- WEI Y, CHEN Y, 2012. Convergence analysis of the spectral methods for weakly singular Volterra integro-differential equations with smooth solutions[J]. *Adv Appl Math Mech*, 4(1): 1–20.
- YANG Y, CHEN Y, HUANG Y, 2014. Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation method for fractional integro-differential equations[J]. *Acta Math Sci*, 34(3): 673–690.
- ZENG F, LIU F, LI C, et al, 2014. A Crank-Nicolson ADI spectral method for a two-dimensional Riesz space fractional nonlinear reaction-diffusion equation[J]. *SIAM J Numer Anal*, 52(6): 2599–2622.
- ZHANG R, ZHU B, XIE H, 2013. Spectral methods for weakly singular Volterra integral equations with pantograph delays[J]. *Front Math China*, 8(2): 281–299.
- ZHENG W S, 2021. Jacobi convergence analysis for delay Volterra integral equation with weak singularity[J]. *Math Numer Sin*, 43 (2): 253–260.